

SIMULASI MODEL BEDDINGTON-DEANGELIS DENGAN ABTP-TRIMEAN BENTUK PERTAMA

Noor Ashikin Othman, Mohammad Khatim Hasan dan bahari Idrus
Fakulti teknologi dan sains maklumat, Universiti kebangsaan malaysia

Abstrak

Kebanyakan sistem semulajadi dunia nyata menunjukkan tingkah laku bermusim disebabkan perubahan alam sekitar atau perubahan iklim. Hasilnya, pelbagai spesies menunjukkan perubahan bermusim dalam parameter kitaran hidup mereka. Adalah penting untuk memahami bagaimana perubahan bermusim dapat mengawal tingkah laku antara spesies. Interaksi antara pemangsa dan mangsa dapat dimodelkan oleh Model Beddington-DeAngelis. Model ini mengaplikasikan fungsi tindak balas jenis Holling II bagi mewakili interaksi mangsa dan pemangsa. Dalam kajian ini, kaedah berangka tidak piawai dengan trimean bentuk pertama dibangun untuk meningkatkan simulasi terhadap tingkah laku interaksi antara spesies dan meramal titik keseimbangan dengan tepat dan cepat. Keputusan menunjukkan bahawa kaedah yang dicadang dapat meramal titik keseimbangan dengan tepat ($4,1$) dan cepat ($t = 82.289ms$) walaupun menggunakan nilai selang langkah h yang besar ($h=1.159$).

Kata kunci: algoritma berangka tidak piawai, trimean, interaksi antara spesies, model Beddington-DeAngelis.

PENDAHULUAN

Populasi ekologi dalam dunia nyata memaparkan tentang hubungan tingkah laku akibat interaksi antara pemangsa dan mangsa. Dalam model matematik, persamaan pembezaan diguna untuk mencari hubungan kait interaksi antara pemangsa dan mangsa. Model Lotka- Volterra merupakan model yang paling mudah dan banyak diguna untuk mensimulasi interaksi antara pemangsa dan mangsa. Ramai penyelidik mengubah suai model tersebut dalam banyak cara sejak ia diperkenalkan pada tahun 1920-an.

Interaksi antara populasi boleh di model mengguna model Beddington-DeAngelis (1975). Kelebihannya adalah kadar pertumbuhan dan kematian tidak sepenuhnya bergantung kepada populasi mangsa dan pemangsa. Model ini telah mengambil kira persekitaran di sekitar kawasan tertentu. Pemangsa juga boleh mencari sumber makanan lain selain mangsa di samping kadar kematian mangsa boleh disebabkan oleh penyakit dan pertarungan antara pemangsa dan mangsa. Beberapa contoh penyelidik yang menggunakan model Beddington-DeAngelis ialah (Zhang & Xiang 2014), dan (Wei 2018). Zhang dan Xiang membangunkan model dengan musuh semulajadi mempunyai fungsi tindak balas model Beddington-DeAngelis untuk mengawal perosak (Zhang & Xiang 2014). Wei menggunakan model Beddington-DeAngelis bagi memodelkan pertumbuhan tumor dengan rawatan kanser kemoterapi dan imunoterapi (Wei 2018). Hasilnya model tersebut dapat memperbaiki hasil rawatan dengan lebih baik.

Kaedah berangka piawai mempunyai tahap ketidakstabilan berangka (Mickens 1994). Kaedah tersebut hanya memberikan keputusan yang tepat apabila menggunakan nilai selang langkah h kecil sahaja. Contoh kaedah berangka piawai ialah kaedah Adam-Moulton dan kaedah Runge-Kutta. Hasan dan rakan-rakan penyelidik (2015) membandingkan kaedah Adam-Moulton dan kaedah Runge-Kutta Order Keempat dalam menganalisis tingkah laku model interaksi Rosenweig-MacArthur. Keputusan menunjukkan bahawa kedua-dua kaedah dapat mensimulasikan masalah tingkah laku dengan ketepatan yang hampir sama tetapi kaedah Adam-Moulton dapat menyelesaikan masalah dengan lebih cepat daripada kaedah Runge-Kutta Order Keempat. Namun begitu, nilai selang langkah h besar mengurangkan ketepatan bagi kedua-dua kaedah tersebut (Hasan et al. 2015).

Trimean ditakrifkan oleh (Turkey 1977) seperti berikut $TM = (H1 + 2M + H2)/4$, yang M ialah median dan $H1$ dan $H2$ adalah sendi bawah dan sendi atas. Trimean adalah purata wajaran bagi kuartil pertama, $Q1$, kuartil kedua, $Q2$ dan kuartil ketiga, $Q3$ dalam persamaan berikut (Li et al. 2014) :

$$TM = (Q1 + 2Q2 + Q3)/4$$

Trimean merupakan salah satu alat pengukur yang digunakan dalam statistik (Mazin et al. 2015). Ia mudah untuk difahami dan boleh membuat pengiraan data dengan cekap. Konsep Trimean ini akan diguna dalam mensimulasi model Beddington-DeAngelis.

Dalam kajian ini, satu skema baru bagi mensimulasi model Beddington-DeAngelis menggunakan kaedah integrasi berangka tidak piawai dengan trimean bentuk pertama yang dinamai kaedah ABTP-Trimean 1. Sebelum ini, Othman dan rakan-rakan penyelidik telah membangun ABTP-Trimean menggunakan model Lotka Volterra dan model Rosenzweig-MacArthur (Hasan et al. 2018; Othman & Hasan 2017).

MODEL BEDDINGTON-DEANGELIS

Model Beddington-DeAngelis diberikan oleh :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - \frac{Axy}{1+x+y}, & x(t_0) &= x_0 \geq 0, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{Exy}{1+x+y} - Dy, & y(t_0) &= y_0 \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

yang x dan y ialah saiz populasi mangsa dan pemangsa, A ialah kadar penangkapan mangsa, E ialah kadar peningkatan pemangsa dan D ialah kadar kematian pemangsa.

Titik keseimbangan bagi persamaan (1) ditakrifkan oleh

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{Axy}{1+x+y} &= 0, \\ \frac{Exy}{1+x+y} - Dy &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Bergantung kepada nilai-nilai parameter bagi persamaan (1) mempunyai keseimbangan berikut :

- i. $E_0 = (0,0)$;
- ii. $E^* = (x^*, y^*) = \left(\frac{AD}{AE-E-AD}, \frac{E}{AE-E-AD} \right)$. Keseimbangan E^* wujud jika dan hanya jika $AE - E - AD > 0$.

Analisis matematik mengenai titik keseimbangan bagi persamaan (2) boleh dirujuk kepada (Dimitrov & Kojouharov 2005). Kaedah ABTP-Trimean bagi model Beddington-DeAngelis akan disimulasi dengan menggunakan perisian Scilab.

METODOLOGI

Untuk membangunkan algoritma berangka tidak piawai dengan trimean bagi persamaan (1), $\frac{dx}{dt}$ akan digantikan dengan $\frac{x_{i+1}-x_i}{\phi}$, dan $\frac{dy}{dt}$ akan digantikan dengan $\frac{y_{i+1}-y_i}{\phi}$ mengikut (Hasan et al. 2018; Mickens 2002; Othman & Hasan 2017).

Kaedah ABTP-Trimean 1

Bagi dimensi $\frac{dx}{dt}$ dalam persamaan (1), nilai x, xy dan y digantikan dengan nilai anggaran masing-masing seperti

$$\begin{aligned} x &= x_i \\ xy &= x_i y_i \\ y &= y_i \end{aligned}$$

Dan dimensi $\frac{dx}{dt}$ dijadikan sebagai fungsi $f(x_i)$ seperti

$$f(x_i) = x_i - \frac{Ax_i y_i}{1 + x_i + y_i}$$

Dengan menggunakan kaedah kestabilan asas tidak piawai Runge-Kutta terbitan kedua, maka persamaan menjadi

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\emptyset} = \frac{f(x_i) + \emptyset f(x_i + (\emptyset)f(x_i))}{2}$$

$$x_{i+1} - x_i = \frac{\emptyset f(x_i) + \emptyset f(x_i + (\emptyset)f(x_i))}{2}$$

$$x_{i+1} = \frac{\emptyset f(x_i) + \emptyset f(x_i + (\emptyset)f(x_i))}{2} + x_i \quad (3)$$

Oleh kerana pendekatan Trimean memerlukan dua nod sebelumnya untuk mengira nod seterusnya, maka persamaan bukan Trimean, iaitu persamaan (3) digunakan untuk dua nod pertama.

Pada $i = 0$, persamaan (3) menjadi

$$f(x_0) = x_0 - \frac{Ax_0 y_0}{1 + x_0 + y_0}$$

$$x_1 = \frac{\emptyset f(x_0) + \emptyset f(x_0 + (\emptyset)f(x_0))}{2} + x_0$$

Pada $i = 1$, persamaan (3) menjadi

$$f(x_1) = x_1 - \frac{Ax_1 y_1}{1 + x_1 + y_1}$$

$$x_2 = \frac{\emptyset f(x_1) + \emptyset f(x_1 + (\emptyset)f(x_1))}{2} + x_1$$

Persamaan trimean $\frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4}$ digantikan dalam nilai x , tanpa mengubah nilai xy dan y pada $i = 2$, persamaan menjadi

$$f(x_2) = \frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4} - \frac{Ax_2 y_2}{1 + \left(\frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4}\right) + y_2}$$

Maka, $f(x_i)$ adalah

$$f(x_2) = 0.25x_1 + 0.5x_2 + 0.25x_3 - \frac{Ax_2 y_2}{1 + (0.25x_1 + 0.5x_2 + 0.25x_3) + y_2}$$

Dengan menggunakan kaedah kestabilan asas tidak piawai Runge-Kutta terbitan kedua, maka persamaan tersebut menjadi

$$x_3 = \frac{\emptyset f(x_2) + \emptyset f(x_2 + (\emptyset)f(x_2))}{2} + x_2$$

Manakala bagi dimensi $\frac{dy}{dt}$ dalam persamaan (1), semua nilai sebelah kanan digantikan dengan

$$\begin{aligned}x &= x_i \\xy &= x_i y_i \\y &= y_i\end{aligned}$$

Dan dimensi $\frac{dy}{dt}$ dijadikan sebagai fungsi $f(y_i)$ seperti

$$f(y_i) = \frac{E x_i y_i}{1 + x_i + y_i} - D y_i$$

Dengan menggunakan kaedah kestabilan asas tidak piawai Runge-Kutta terbitan kedua, maka persamaan menjadi

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\emptyset} = \frac{f(y_i) + f(y_i + (\emptyset)f(y_i))}{2}$$

$$y_{i+1} - y_i = \frac{\emptyset f(y_i) + \emptyset f(y_i + (\emptyset)f(y_i))}{2}$$

$$y_{i+1} = \frac{\emptyset f(y_i) + \emptyset f(y_i + (\emptyset)f(y_i))}{2} + y_i \quad (4)$$

Oleh kerana pendekatan Trimean memerlukan dua nod sebelumnya untuk mengira nod seterusnya, maka persamaan bukan Trimean, iaitu persamaan (4) digunakan untuk dua nod pertama.

Pada $i = 0$, persamaan (4) menjadi

$$f(y_0) = \frac{E x_0 y_0}{1 + x_0 + y_0} - D y_0$$

$$y_1 = \frac{\emptyset f(y_0) + \emptyset f(y_0 + (\emptyset)f(y_0))}{2} + y_0$$

Pada $i = 1$, persamaan (4) menjadi

$$f(y_1) = \frac{E x_1 y_1}{1 + x_1 + y_1} - D y_1$$

$$y_2 = \frac{\emptyset f(y_1) + \emptyset f(y_1 + (\emptyset)f(y_1))}{2} + y_1$$

Pada $i = 2$, kesemua nilai tidak berubah. Maka, $f(x_i)$ adalah

$$f(y_2) = \frac{E x_2 y_2}{1 + x_2 + y_2} - D y_2$$

Dengan menggunakan kaedah kestabilan asas tidak piawai Runge-Kutta terbitan kedua, maka persamaan tersebut menjadi

$$y_3 = \frac{\phi f(y_2) + \phi f(y_2 + (\phi)f(y_2))}{2} + y_2$$

Catatan : Terdapat pelbagai fungsi ϕ sebagai contoh, $\phi(h) = 1 - e^{-h}$, iaitu, $\phi(hq)/q = (1 - e^{-hq})/q$.

KEPUTUSAN DAN PERBINCANGAN

Dalam kajian ini, model Beddington-DeAngelis akan disimulasi dengan menggunakan kaedah ABTP-Trimean 2. Analisis tingkah laku bagi setiap skema ini dilakukan dengan dua set parameter yang telah ditetapkan mengikut (Dimitrov & Kojouharov 2005):

$$A = 6.0, D = 5.0, E = 7.5, q = 5.1$$

- Set 1 : $x_0 = 4.5, y_0 = 0.5$ dengan $h = 1.159$
- Set 2 : $x_0 = 4.5, y_0 = 0.5$ dengan $h = 0.001$.

Keputusan simulasi dibentangkan dalam Rajah 1-6. Analisis corak tingkah laku dan nilai keseimbangan akan dibandingkan dengan penyelesaian analitik.

Dalam teori keseimbangan yang diterangkan dalam Model Beddington-DeAngelis, titik kestabilan linear boleh dikira dengan

$E^* = (x^*, y^*) = \left(\frac{AD}{AE-E-AD}, \frac{E}{AE-E-AD} \right)$. Keseimbangan E^* wujud jika dan hanya jika $AE - E - AD > 0$. Oleh itu, dalam kajian ini, $(6.0)(7.5) - (6.0)(5.0) > 0$. Oleh itu, titik keseimbangan E^* adalah wujud. Keseimbangan E_1 linear stabil apabila $A < E$ iaitu $6.0 < 7.5$.

Algoritma 1: ABTP-Trimean bagi skema pertama

tetapkan:

saiz langkah, h , domain penyelesaian t , nilai awal bagi pemangsa dan mangsa, parameter yang relevan dalam persamaan pembezaan mangsa dan pemangsa

kira nilai anggaran x dan y menggunakan kaedah ABTP-Trimean dengan berikut bagi $i = 1$ hingga $n - 1$:

$$f(x_0) = x_0 - \frac{Ax_0y_0}{1 + x_0 + y_0}$$

$$x_1 = \frac{\phi f(x_0) + \phi f(x_0 + (\phi)f(x_0))}{2} + x_0$$

$$f(y_0) = \frac{Ex_0y_0}{1 + x_0 + y_0} - Dy_0$$

$$y_1 = \frac{\phi f(y_0) + \phi f(y_0 + (\phi)f(y_0))}{2} + y_0$$

kira nilai anggaran x dan y menggunakan kaedah ABTP-Trimean dengan berikut bagi $i > 3$:

$$f(x_i) = 0.25x_{i-1} + 0.5x_i + 0.25x_{i+1} - \frac{Ax_iy_i}{1 + (0.25x_{i-1} + 0.5x_i + 0.25x_{i+1}) + y_i}$$

$$x_{i+1} = \frac{\phi f(x_i) + \phi f(x_i + (\phi)f(x_i))}{2} + x_i$$

$$f(y_i) = \frac{E x_i y_i}{1 + x_i + y_i} - D y_i$$

$$y_{i+1} = \frac{\phi f(y_i) + \phi f(y_i + (\phi) f(y_i))}{2} + y_i$$

Output: $x_{min}, x_{max}, y_{min}$ dan y_{max}
 Plotkan

- 1) Graf populasi pemangsa dan populasi mangsa
- 2) Graf interaksi populasi pemangsa melawan populasi mangsa

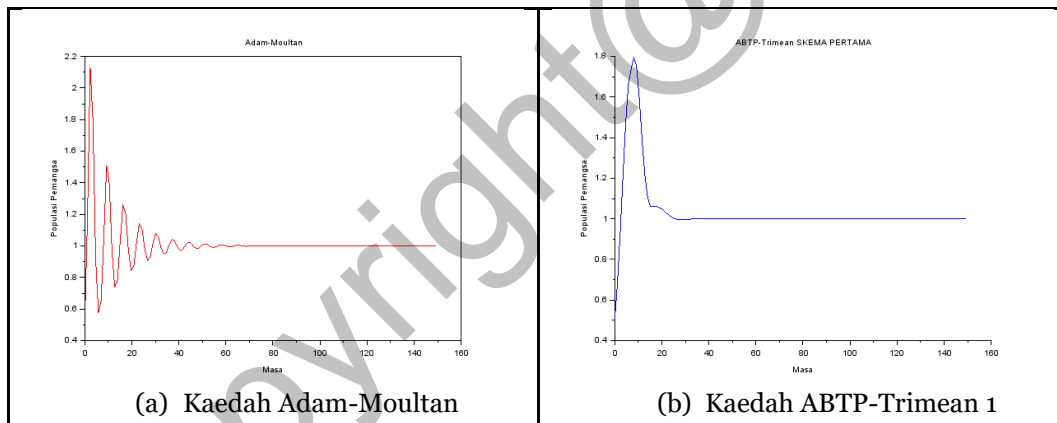
Titik keseimbangan dikira seperti berikut :

$$E^* = (x^*, y^*) = \left(\frac{AD}{AE - E - AD}, \frac{E}{AE - E - AD} \right)$$

$$= \left(\frac{(6.0)(5.0)}{(6.0)(7.5) - (7.5) - (6.0)(5.0)}, \frac{(7.5)}{(6.0)(7.5) - (7.5) - (6.0)(5.0)} \right) = (4, 1).$$

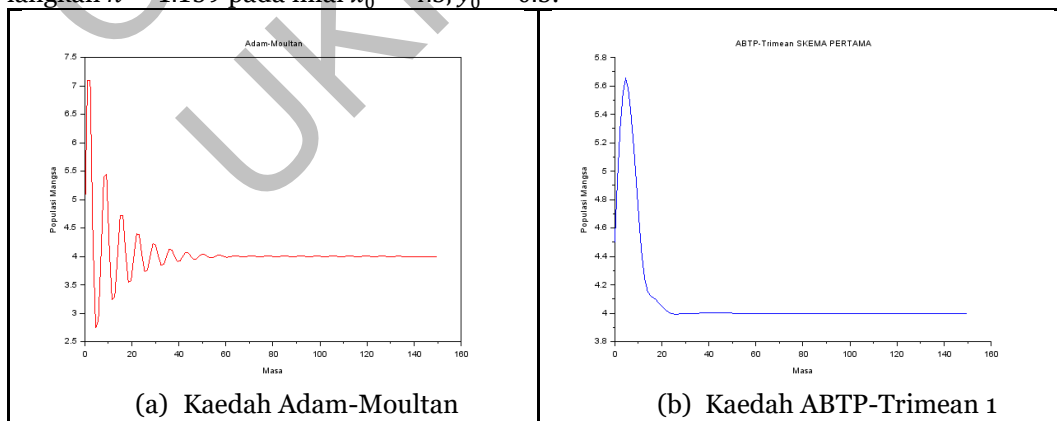
Jadi, titik keseimbangan E^* adalah (4,1).

Merujuk Rajah 1, kaedah yang dicadangkan untuk nilai saiz langkah $h = 1.159$ pada nilai $x_0 = 4.5, y_0 = 0.5$ dibandingkan dengan kaedah Adam-Moultan bagi populasi pemangsa.



Rajah 1 Graf perbandingan model Beddington-DeAngelis bagi Set 1 dengan nilai $x_0 = 4.5, y_0 = 0.5$ dan $h = 1.159$ bagi populasi pemangsa.

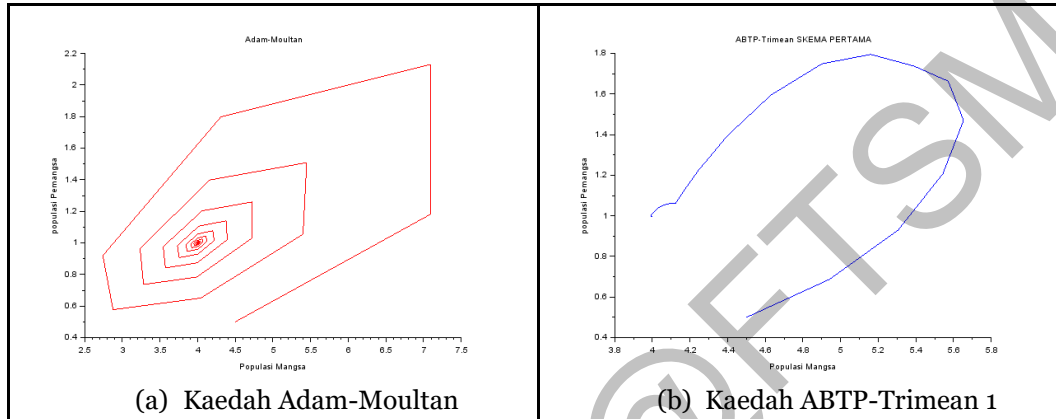
Merujuk Rajah 2, membandingkan kaedah yang dicadangkan dengan Adam-Moultan untuk nilai saiz langkah $h = 1.159$ pada nilai $x_0 = 4.5, y_0 = 0.5$.



Rajah 2 Graf perbandingan model Beddington-DeAngelis bagi Set 1 dengan nilai $x_0 = 4.5, y_0 = 0.5$ dan $h = 1.159$ bagi populasi mangsa.

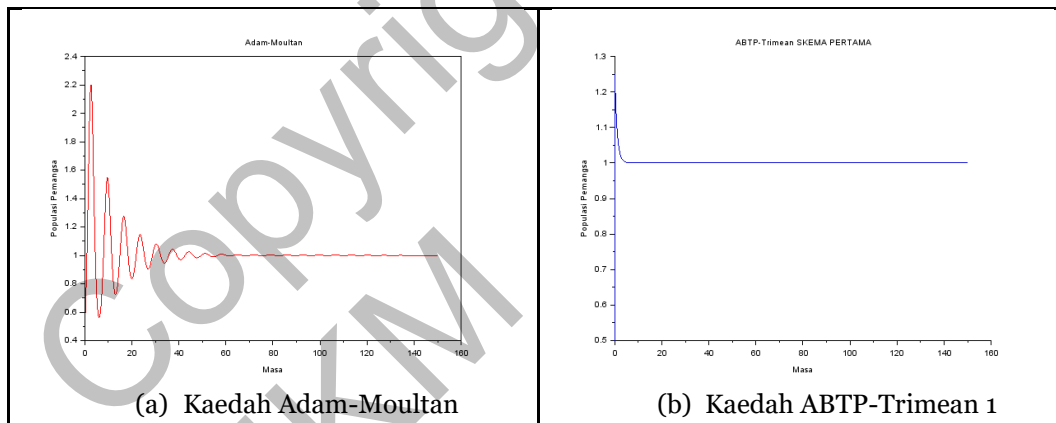
Merujuk Rajah 3 membandingkan kaedah yang dicadang dengan Adam-Moultan untuk nilai saiz langkah $h = 1.159$ pada nilai $x_0 = 4.5, y_0 = 0.5$.

Kaedah ABTP-Trimean 1 untuk Set 1 memerlukan masa ($t = 82.289ms$), manakala kaedah Adam-Moultan memerlukan masa ($t = 172ms$) untuk mencapai titik keseimbangan (4,1).



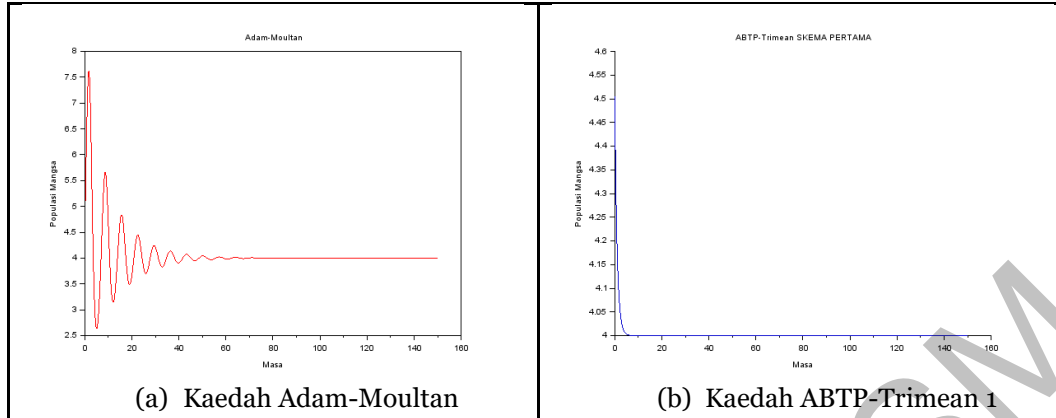
Rajah 3 Graf perbandingan model Beddington-DeAngelis bagi Set 1 dengan nilai $x_0 = 4.5, y_0 = 0.5$ dan $h = 1.159$ bagi populasi pemangsa melawan populasi mangsa.

Merujuk Rajah 4 membandingkan kaedah yang dicadang dengan Adam-Moultan untuk nilai saiz langkah $h = 0.001$ pada nilai $x_0 = 4.5, y_0 = 0.5$.



Rajah 4 Graf perbandingan model Beddington-DeAngelis bagi Set 2 dengan nilai $x_0 = 4.5, y_0 = 0.5$ dan $h = 0.001$ bagi populasi pemangsa.

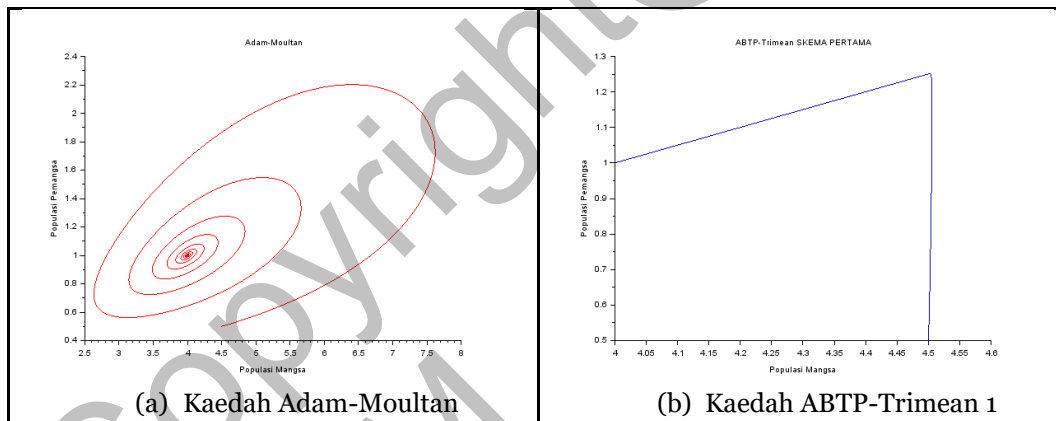
Merujuk Rajah membandingkan kaedah yang dicadang dengan Adam-Moultan untuk nilai saiz langkah $h = 0.001$ pada nilai $x_0 = 4.5, y_0 = 0.5$.



Rajah 5 Graf perbandingan model Beddington-DeAngelis bagi Set 2 dengan nilai $x_0 = 4.5$, $y_0 = 0.5$ dan $h = 0.001$ bagi populasi mangsa.

Merujuk Rajah 6 membandingkan kaedah yang dicadangkan dengan Adam-Moultan untuk nilai saiz langkah $h = 0.001$ pada nilai $x_0 = 4.5$, $y_0 = 0.5$.

Kaedah ABTP-Trimean untuk Set 2 bagi Skema Pertama memerlukan masa ($t = 16.125ms$) untuk mencapai titik keseimbangan (4,1) manakala kaedah Adam-Moultan memerlukan masa ($t = 205983ms$) untuk mencapai titik keseimbangan (4,1). Simulasi ini dapat dilihat dengan menggunakan perisian Scilab. Ini menunjukkan bahawa kaedah ABTP-Trimean dapat mensimulasikan dengan lebih cepat dan tepat berbanding dengan kaedah Adam-Moultan.



Rajah 6 Graf perbandingan model Beddington-DeAngelis bagi Set 2 dengan nilai $x_0 = 4.5$, $y_0 = 0.5$ dan $h = 0.001$ bagi populasi pemangsa melawan populasi mangsa.

Rajah 3 dan Rajah 6 menunjukkan interaksi antara populasi pemangsa dan populasi mangsa. Daripada graf (a) bagi kedua-dua rajah tersebut dapat dilihat bahawa populasi pemangsa meningkat dan populasi mangsa juga meningkat. Ini disebabkan oleh nilai awal populasi pemangsa lebih kecil ($y_0 = 0.5$) daripada populasi mangsa $x_0 = 4.5$. Daripada hasil tersebut dapat dilihat bahawa populasi pemangsa meningkat secara maksimum apabila saiz populasi mangsa yang besar. Pada waktu ini, kadar kelahiran mangsa meningkat menyebabkan makanan bagi pemangsa hanya bergantung pada mangsa sahaja. Ini menyebabkan tekanan pemangsaan meningkat sehingga menurunkan populasi mangsa. Penurunan populasi mangsa yang berterusan akan menyebabkan populasi pemangsa turut menurun akibat kekurangan makanan. Sebagai alternatif, pemangsa akan mencari sumber makanan yang lain dan tidak bergantung pada mangsa sahaja. Hal ini menyebabkan populasi mangsa bertambah dan seterusnya akan mencapai keseimbangan bagi populasi pemangsa dan populasi mangsa pada penghujung masa. Titik

keseimbangan berada pada kedudukan (4,1) dan juga secara tepat mensimulasikan penyelesaian analisis, iaitu (4,1).

Rajah 3 bagi graf (b) adalah interaksi antara populasi pemangsa dan populasi mangsa daripada kaedah ABTP-Trimean. Pada awalnya, populasi pemangsa meningkat dan populasi mangsa juga meningkat sehingga ke titik perubahan di mana populasi pemangsa meningkat dan populasi mangsa tidak berubah. Kemudian, populasi pemangsa berkurang dan populasi mangsa juga berkurang. Trend perubahan ini terus berubah sehingga mencapai titik keseimbangan. Titik keseimbangan berada pada kedudukan (4,1) dan juga secara tepat mensimulasikan penyelesaian analisis, iaitu (4,1).

Rajah 6 bagi graf (b) adalah interaksi antara populasi pemangsa dan populasi mangsa daripada kaedah ABTP-Trimean. Daripada graf tersebut dapat dilihat populasi pemangsa meningkat manakala populasi mangsa tidak berubah pada awalnya sehingga ke titik perubahan di mana populasi mangsa semakin berkurang dan populasi pemangsa juga berkurang. Ini menunjukkan sumber makanan adalah kritikal dan tidak cukup untuk pemangsa. Pemangsa akan bersaing (membunuh) antara satu sama lain sehingga menyebabkan kepupusan pemangsa. Titik keseimbangan berada pada kedudukan (4,1) dan juga secara tepat mensimulasikan penyelesaian analisis, iaitu (4,1).

Nilai saiz langkah h yang digunakan sangat mempengaruhi tingkah laku interaksi simulasi antara kaedah Adam-Moulton dan kaedah ABTP-Trimean. Penggunaan resolusi tinggi bagi nilai saiz langkah h akan meningkatkan ketepatan dan kecekapan simulasi. Oleh itu, Rajah 4-6 dengan jelas menunjukkan bahawa menggunakan nilai saiz langkah h yang lebih kecil mensimulasikan interaksi lebih jelas dan cepat berbanding dengan menggunakan saiz langkah h yang lebih besar. Ini ditunjukkan oleh kurangnya turun naik tingkah laku pemangsa dan mangsa serta lebih cepat masa interaksi mangsa dan pemangsa untuk mencapai kestabilan.

KESIMPULAN

Kajian ini telah menunjukkan bahawa penyelesaian menggunakan kaedah integrasi berangka tidak piawai dengan trimean dapat menunjukkan keputusan yang lebih baik daripada kaedah integrasi berangka tepat. Walau bagaimanapun, ia adalah idea yang baik bagi melaksanakan simulasi untuk mengesahkan prestasi kaedah baru ini. Kaedah yang dicadangkan ini menunjukkan tingkah laku yang hampir serupa antara satu sama lain. Pilihan nilai saiz langkah h memainkan peranan penting dalam meniru tingkah laku simulasi yang tepat. Walau bagaimanapun, titik keseimbangan dapat disimulasikan dengan tepat dan cepat walaupun dengan menggunakan saiz langkah h yang lebih besar berbanding dengan kaedah Adam-Moulton. Ini adalah kelebihan utama kaedah ABTP-Trimean 1 yang dicadangkan.

PENGHARGAAN

Artikel ini adalah sebahagian daripada Geran FRGS/1/2021/ICT06/UKM/02/2 Universiti Kebangsaan Malaysia.

RUJUKAN

- Beddington, J. R. 1975. Mutual Interference Between Parasites or Predators and its Effect on Searching Efficiency. *The Journal of Animal Ecology* 44(1): 331. doi:10.2307/3866
- DeAngelis, D. L., Goldstein, R. A. & O'Neill, R. V. 1975. A Model for Tropic Interaction. *Ecology* 56(4): 881–892. doi:10.2307/1936298
- Dimitrov, D. T. & Kojouharov, H. V. 2005. Nonstandard finite-difference schemes for general two-dimensional autonomous dynamical systems. *Applied Mathematics Letters* 18(7): 769–774. doi:10.1016/j.aml.2004.08.011
- Hasan, M. K., Abdul Karim, S. A. & Sulaiman, J. 2015. Graphical Analysis of Rosenzweig-MacArthur via Adams-Moulton and Fourth Order Runge-Kutta Methods. *The 5th International Conference on Electrical Engineering and Informatics* (Bali, Indonesia): 10–11 August.
- Hasan, M. K., Othman, N. A., Ariffin, S., Karim, A. & Sulaiman, J. 2018. Semi Non-Standard Trimean Algorithm for Rosenzweig-MacArthur Interaction Model 8(4): 1520–1527.
- Li, B., Xiong, W., Hu, W. & Funt, B. 2014. Evaluating combinational illumination estimation methods on real-world images. *IEEE Transactions on Image Processing* 23(3): 1194–1209.

- doi:10.1109/TIP.2013.2277943
- Mazin, B., Delon, J. & Gousseau, Y. 2015. Estimation of Illuminants From Projections on the Planckian Locus. *IEEE Transactions on Image Processing* 24(6): 1944–1955. doi:10.1109/TIP.2015.2405414
- Mickens, R. E. 1994. Non-standard finite difference model of differential equations. *World Scientific* (Singapore): 144–162.
- Mickens, R. E. 2002. Non-standard finite difference schemes for differential equations. *Journal of Difference Equations and Applications* 823–847.
- Mickens, R. E. 2005. A numerical integration technique for conservative oscillators combining non-standard finite difference method with a Hamilton's principle. *Journal of Sound and Vibration* 477–482.
- Mickens, R. E. 2007. Calculation of denominator functions for nonstandard finite difference schemes of differential equations satisfying a positivity condition. *Numerical Method for Partial Differential Equations* 672–691.
- Mickens, R. E. 2018. A note on exact finite difference schemes for modified Lotka – Volterra differential equations Lotka – Volterra differential equations. *Journal of Difference Equations and Applications* 6198: 1–7. doi:10.1080/10236198.2018.1430792
- Othman, N. A. & Hasan, M. K. 2017. New hybrid two-step method for simulating lotka-volterra model. *Pertanika Journal of Science and Technology* 25(S6): 115–124. doi:10.1080/10236198.2018.1430792
- Turkey. 1977. Exploratory data analysis Addison-Wesley, Boston.
- Wei, H. C. 2018. A mathematical model of tumour growth with Beddington–DeAngelis functional response: A case of cancer without disease. *Journal of Biological Dynamics* 12(1): 194–210. doi:10.1080/17513758.2017.1418028
- Zhang, J. & Xiang, Z. 2014. Study on the mathematical model of virus infection in pest management. *26th Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2014* 1616–1619. doi:10.1109/CCDC.2014.6852426