

APLIKASI PURATA PEMBERAT SKEMA 1 BAGI MENINGKATKAN PRESTASI KAEDAH TAK PIAWAI KE ATAS MODEL LOTKA - VOLTERRA

Mohammad Khatim Hasan dan Shahizan Mazlan

1. Pengenalan

Fokus kajian ini adalah mengaplikasikan kaedah purata berpemberat keatas kaedah beza terhingga tidak piawai (BTTP). Terdapat beberapa langkah untuk menyelesaikan masalah ini. Langkah yang pertama adalah dengan mengaplikasikan purata berpemberat kepada kaedah berangka tak piawai. Langkah yang kedua adalah membina algoritma bagi memudahkan lagi penghasilan pengaturcaraan yang boleh difahami melalui komputer. Langkah seterusnya, melakukan simulasi program yang berpandukan parameter-parameter yang berlainan bagi setiap model yang diuji dengan menggunakan perisian Scilab. Langkah yang terakhir adalah menganalisis hasil simulasi daripada kaedah BTTP dengan kaedah BTP. Kedua-dua kaedah ini merupakan kaedah yang baik dan boleh digunakan dalam kajian ini. Hasil dari analisis yang dibuat, perbezaan antara kedua-dua kaedah ini adalah dipengaruhi oleh nilai selang masa, h . Sekiranya sesuatu model pemangsa-mangsa disimulasi dengan selang masa yang lebih besar, kaedah yang paling sesuai adalah kaedah BTTP, manakala jika disimulasi dengan menggunakan selang masa yang kecil, kaedah yang paling sesuai adalah kaedah BTP.

2. Kaedah Berangka Tak Piawai

Persamaan pembezaan memainkan peranan penting dalam penghasilan sesuatu model matematik. Setiap model matematik tidak dapat diselesaikan secara analitik, kerana kebanyakan model matematik dibangunkan berdasarkan anggaran bagi memperoleh keputusan hampir tepat. Salah satu kaedah yang popular dalam menyelesaikan masalah model matematik ini adalah kaedah beza terhingga. Kaedah ini hanya memberikan keputusan yang hampir tepat apabila menggunakan selang masa yang kecil sahaja. Ini bermakna sekiranya sesuatu masalah itu menggunakan selang masa yang besar maka keputusan yang diberikan oleh kaedah ini tidak begitu tepat. Untuk mengatasi masalah ini. Mickens (2003) telah mencadangkan satu pendekatan baru untuk membangunkan kaedah beza terhingga piawai bagi menyelesaikan

persamaan pembezaan ini. Antara pendekatannya adalah menormalkan semula penyebut di dalam terbitan diskrit dan penghampiran bukan tempatan bagi sebutan tidak linear.

Bagi menghasilkan kaedah beza terhingga tidak piawai (BTTP) Mickens telah menetapkan beberapa syarat antaranya (Mickens 2003):

Syarat 1. Arah terbitan diskret hendaklah sama dengan peringkat terbitan disempadan bagi persamaan pembezaan.

Syarat 2. penyebut bagi terbitan diskret mestilah dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi yang rumit berdasarkan saiz langkah.

Syarat 3. Sebutan tidak linear perlu digantikan dengan perwakilan sebutan diskret bukan tempatan.

Syarat 4. Syarat khas yang dipegang oleh penyelesaian daripada persamaan pengkamilan perlu juga dipegang oleh penyelesaian daripada kaedah beza terhingga.

Syarat 5. Kaedah ini tidak perlu memperkenalkan penyelesaian yang tidak berkaitan atau palsu.

3. Purata Berpemberat

Purata berpemberat memberi gambaran bahawa bukan setiap titik data menyumbangkan pemberat yang sama kepada purata. Tanggapan purata berpemberat ini memainkan peranan dalam statistik deskriptif malah juga berlaku yang lebih umum di beberapa bidang lain.

Sekiranya semua pemberat adalah sama, maka purata pemberat adalah sama dengan purata aritmetik. Walaupun secara umumnya purata pemberat mempunyai fungsi yang sama dengan purata aritmetik, tetapi ia mempunyai ciri-ciri yang berlainan seperti yang dimaksudkan oleh paradoks Simpson.

Kebiasaannya, purata pemberat adalah bukan set kosong sebaliknya mempunyai data seperti Sejong, Jimmie, & Yongdo (2011):

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Dengan pemberat bukan negatif

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i x_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i},$$

yang purata:

$$\bar{x} = \frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n}{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n}$$

Oleh itu unsur-unsur data dengan pemberat yang tinggi lebih mempengaruhi keputusan berbanding dengan unsur pemberat yang kecil. Pemberat mestilah tidak boleh menjadi negatif. Ia berkemungkinan menjadi sifar, tetapi tidak akan menjadi sifar.

Berdasarkan dengan rumus yang mudah apabila pemberat yang normal bersamaan dengan satu sebagai contoh:

$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$. Bagi pemberat normal seperti purata pemberat adalah hanya $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i$ (Raghib, & Mowaffaq 2006).

Perhatikan bahawa sesuatu yang boleh sentiasa menormalkan pemberat dengan membuat perubahan kepada pemberat $\omega'_i = \frac{\omega_i}{\sum_{j=1}^n \omega_j}$. Menggunakan pemberat normal menghasilkan keputusan yang sama apabila menggunakan pemberat yang asal.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \omega'_i x_i = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{\sum_{j=1}^n \omega_j} x_i = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i x_i}{\sum_{j=1}^n \omega_j} = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i x_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i}$$

Purata biasa adalah $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ merupakan kes khas bagi purata pemberat yang semua data mempunyai pemberat yang sama, $\omega_i = \omega$. Apabila pemberat menjadi normal kemudian $\omega'_i = \frac{1}{n}$.

4. Model lotka-volterra

Model Lotka-Volterra adalah sistem persamaan pembezaan yang lebih dikenali sebagai model pemangsa-mangsa yang menggambarkan interaksi kompetitif antara dua spesies. Persamaan model adalah berdasarkan lengkung logistic. Dalam model Lotka-Volterra, dua spesies yang dilambangkan sebagai X dan Y, digambarkan oleh Eq. (1):

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = aX - bX^2 - cXY \\ \frac{dY}{dt} = pY - qY^2 - rYX \end{cases} \quad (1)$$

Ungkapan X^2 dan Y^2 menandakan interaksi dalam spesies, manakala XY dan YX menggambarkan interaksi antara spesies yang berbeza. Parameter a dan p adalah faktor pertumbuhan spesies X dan Y masing-masing untuk berkembang. Sementara itu, parameter penurunan saiz spesies yang terhad diwakili oleh parameter b dan q, dengan parameter c dan r mewakili kadar persaingan antara kedua-dua spesies.

5. Pembinaan Kaedah Beza Terhingga Tidak Piawai Dengan Pemberat

Untuk menyelesaikan anggaran pada $[0, t]$, saiz langkah $h = \Delta t$ digunakan menjadi $t_i = ih$, di mana $i = 1: N$. Sistem persamaan (1) dianggarkan menggunakan penghampiran BTTP. Dengan menggunakan fakta bahawa $\lim_{h \rightarrow 0} \sin h = h$, $\lim_{h \rightarrow 0} \sinh h = h$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos h} = 1$ dan $\tan h = h$, salah satu boleh menggantikan h maka $\emptyset = \sin h$, $\emptyset = \sinh h$, dan $\emptyset = \tan h$ (Bhowmik, 2009). Dengan ini, Beberapa fungsi penghampiran piawai dengan sifat yang sama digunakan antaranya:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\emptyset}, \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\emptyset}, \quad (3)$$

Di mana nilai anggaran bagi x , y , dan xy adalah berbeza. Selain itu, anggaran bagi nilai x_{i+1} dan y_{i+1} ditukarkan bagi setiap penyelesaian dalam setiap lelaran. Di bab ini telah dibahagikan kepada tiga kes di mana setiap kes mempunyai nilai anggaran x_{i+1} , y_{i+1} dan z_{i+1} yang berbeza dengan menggunakan kaedah BTTP dalam setiap lelaran serta menggunakan parameter yang berbeza bagi setiap kes. Kaedah BTTP yang dibangunkan adalah menggunakan kaedah Euler tidak piawai.

Bagi dimensi $\frac{dx}{dt}$ dalam persamaan (1) digantikan dengan

$$x = wx_i + (1 - w)x_{i+1},$$

$$xy = x_{i+1}y_i$$

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\emptyset} = A(wx_i + (1 - w)x_{i+1}) - B(x_{i+1}y_i)$$

$$x_{i+1} - x_i = A\emptyset wx_i + A\emptyset x_{i+1} - A\emptyset wx_{i+1} - B\emptyset x_{i+1}y_i,$$

$$x_{i+1} - A\emptyset x_{i+1} + A\emptyset wx_{i+1} + B\emptyset x_{i+1}y_i = x_i + A\emptyset wx_i,$$

$$x_{i+1}(1 - A\emptyset + A\emptyset w + B\emptyset y_i) = x_i(1 + A\emptyset w),$$

$$x_{i+1} = \frac{1 + A\phi w}{1 - A\phi + A\phi w + B\phi y_i} x_i$$

Manakala bagi dimensi $\frac{dy}{dt}$ dalam persamaan (1) digantikan dengan

$$y = wy_i + (1 - w)y_{i+1},$$

$$xy = x_{i+1}y_i$$

Ditulis sebagai

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\phi} = -C(wy_i + (1 - w)y_{i+1}) + D(x_{i+1}y_i)$$

$$y_{i+1} - y_i = -C\phi wy_i - C\phi y_{i+1} + C\phi wy_{i+1} + D\phi x_{i+1}y_i,$$

$$y_{i+1} + C\phi y_{i+1} - C\phi wy_{i+1} = y_i - C\phi wy_i + D\phi x_{i+1}y_i,$$

$$y_{i+1}(1 + C\phi - C\phi w) = y_i(1 - C\phi w + D\phi x_{i+1}),$$

$$y_{i+1} = \frac{1 - C\phi w + D\phi x_{i+1}}{1 + C\phi - C\phi w} y_i$$

Algoritma: Kaedah beza terhingga tidak piawai bagi model pemangsa dan mangsa Lotka-Volterra (Skema 1)

tetapkan :

saiz langkah h

Fungsi selang langkah P

nilai t ditetapkan $0 \leq t \leq 150$ dengan saiz langkah h

nilai y ditetapkan $0 \leq y \leq 300$ dengan saiz langkah h

Nilai awal bagi masa $t = 0$

Nilai awal bagi populasi mangsa, X

Nilai awal bagi populasi pemangsa, Y

Nilai Parameter:

A = Kadar pembiakan mangsa

B = Kadar pemangsa memakan pemangsa

C = Kadar kematian pemangsa

D = Kadar pembiakan pemangsa

Nilai Pemberat W ;

kira langkah masa

kira anggaran nilai X dan Y menggunakan kaedah tidak piawai berikut

$$x_{i+1} = \frac{1 + A\phi w}{1 - A\phi + A\phi w + B\phi} x_i$$

$$y_{i+1} = \frac{1 + C\phi - C\phi w}{1 - C\phi w + D\phi x_{i+1}} y_i$$

Bagi $i = 1$ hingga $n - 1$

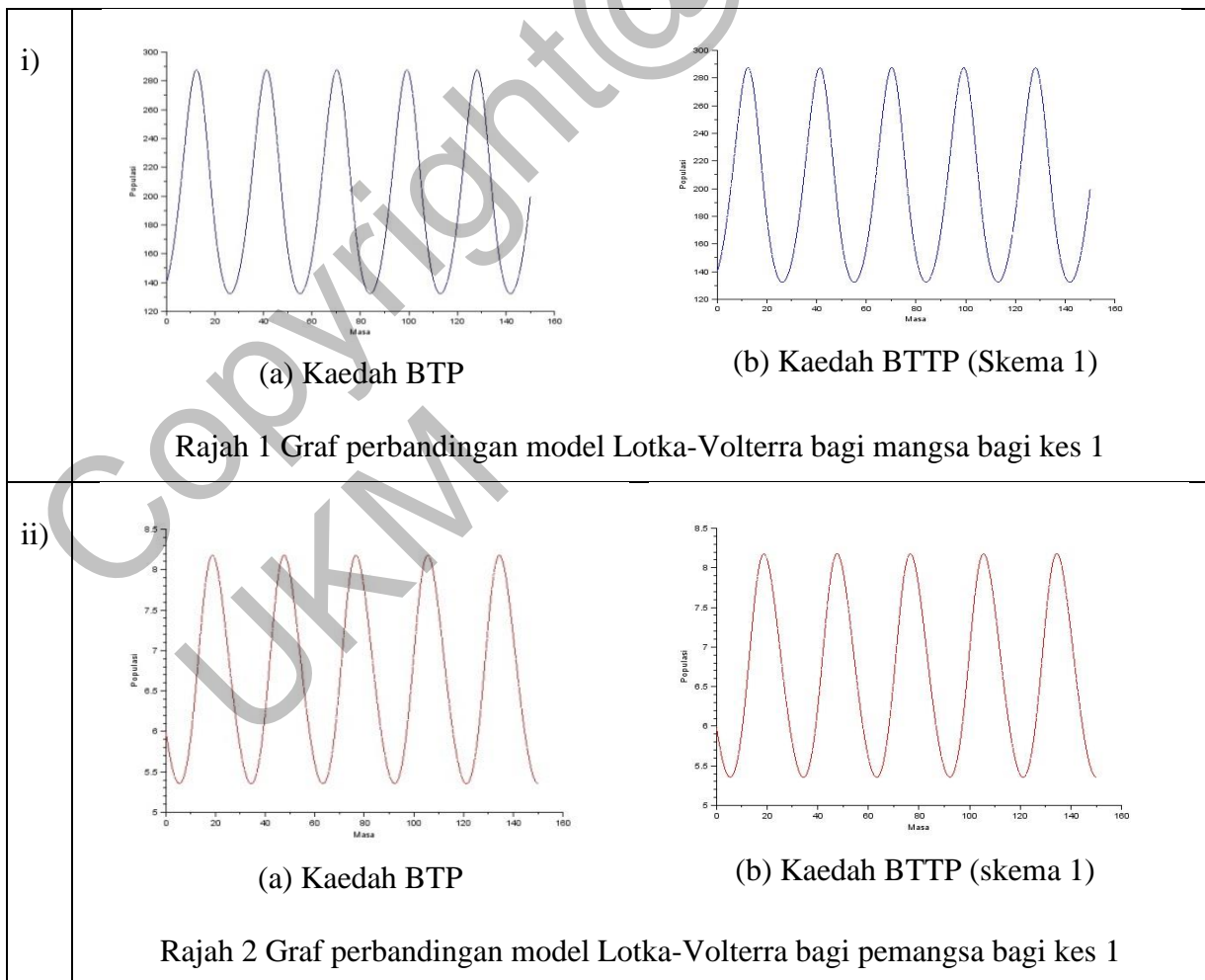
Output: x_{min} , x_{max} , y_{min} dan y_{max}

Plotkan

- 1) graf populasi mangsa
- 2) graf populasi pemangsa
- 3) graf populasi pemangsa menentang mangsa

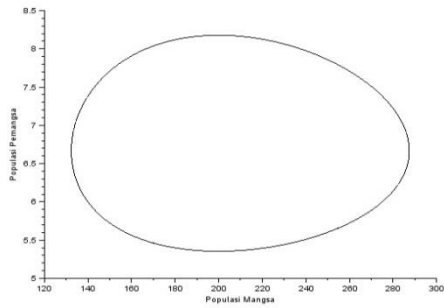
6. Simulasi

Kes 1 ($A > C$) bagi nilai $A = 0.4$, $B = 0.06$, $c = 0.12$, $d = 0.0006$, $w = 0.37$, $h = 0.001$, $x_0 = 140$ dan $y_0 = 6$

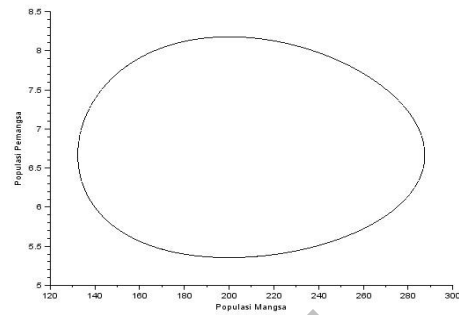


iii

)



(a) Kaedah BTP

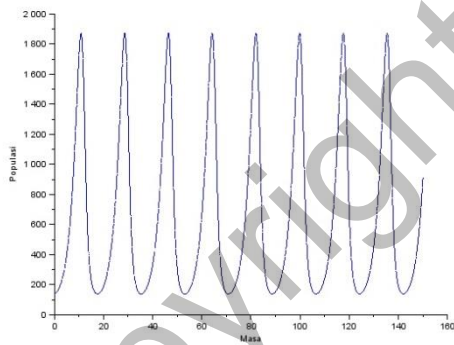


(b) Kaedah BTTP (skema 1)

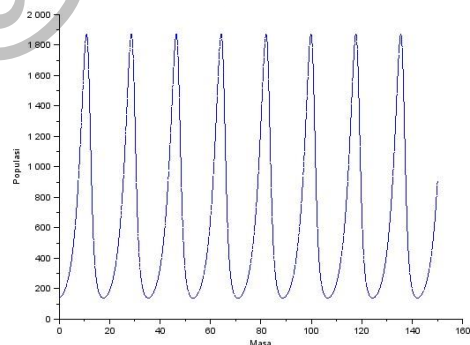
Rajah 3 Graf perbandingan model Lotka-Volterra bagi pemangsa lawan mangsa bagi kes 1

Kes 2 ($A = C$) bagi nilai $A = 0.4$, $B = 0.06$, $c = 0.4$, $d = 0.0006$, $w = 0.37$, $h = 0.001$, $x_0 = 140$ dan $y_0 = 6$

i)



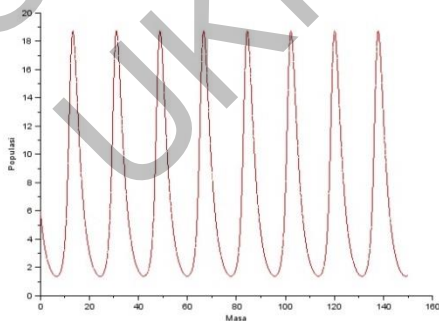
(a) Kaedah BTP



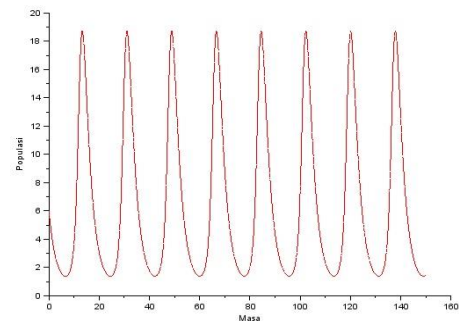
(b) Kaedah BTTP (skema 1)

Rajah 4 Graf perbandingan model Lotka-Volterra bagi mangsa bagi kes 2

ii)



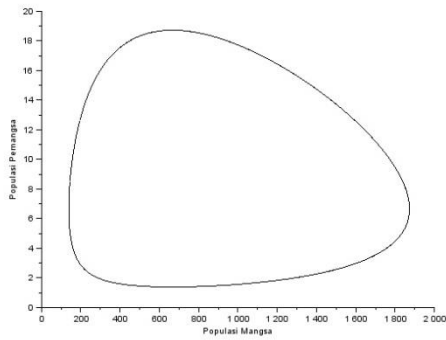
(a) Kaedah BTP



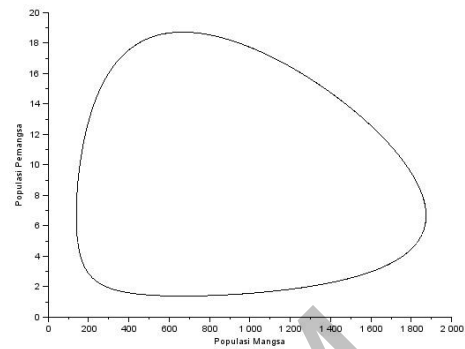
(b) Kaedah BTTP (skema 1)

Rajah 5 Graf perbandingan model Lotka-Volterra bagi pemangsa bagi kes 2

iii)



(a) Kaedah BTP

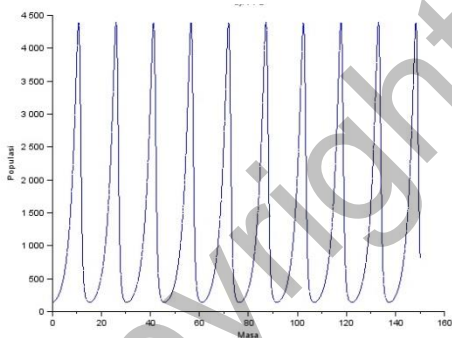


(b) Kaedah BTTP (skema 1)

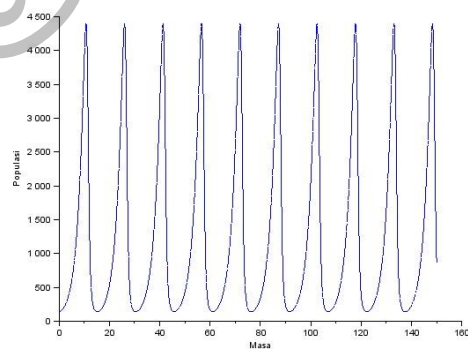
Rajah 6 Graf perbandingan model Lotka-Volterra bagi pemangsa lawan mangsa bagi kes 2

Kes 3 ($A < C$) bagi nilai $A = 0.4$, $B = 0.06$, $c = 0.74$, $d = 0.0006$, $w = 0.37$, $h = 0.001$, $x_0 = 140$ dan $y_0 = 6$

i)



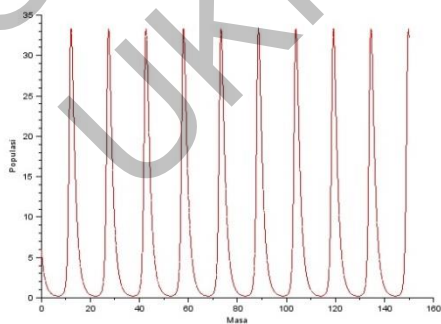
(a) Kaedah BTP



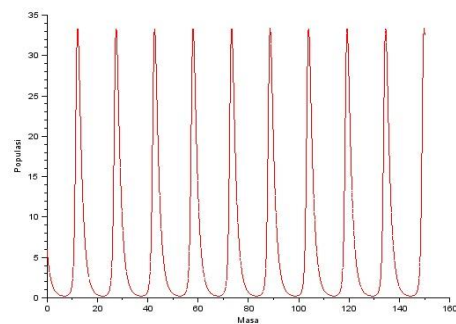
(b) Kaedah BTTP (skema 1)

Rajah 7 Graf perbandingan model Lotka-Volterra bagi mangsa bagi kes 3

ii)



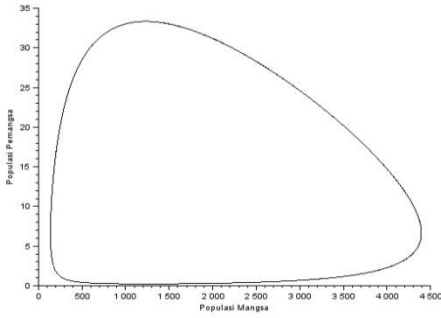
(a) Kaedah BTP



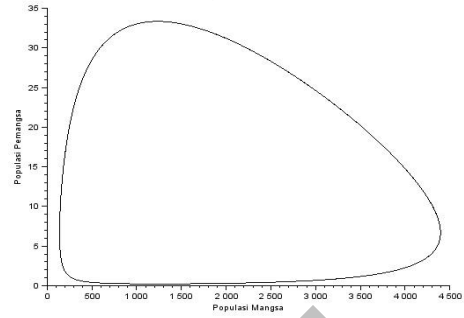
(b) Kaedah BTTP (skema 1)

Rajah 8 Graf perbandingan model Lotka-Volterra bagi pemangsa bagi kes 3

iii)



(a) Kaedah BTP

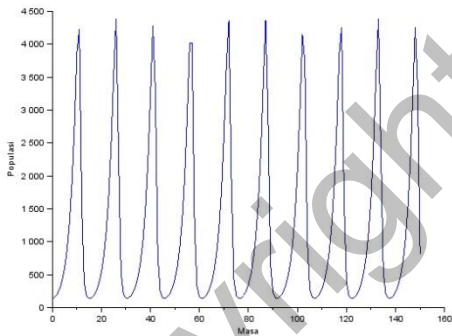


(b) Kaedah BTTP (skema 1)

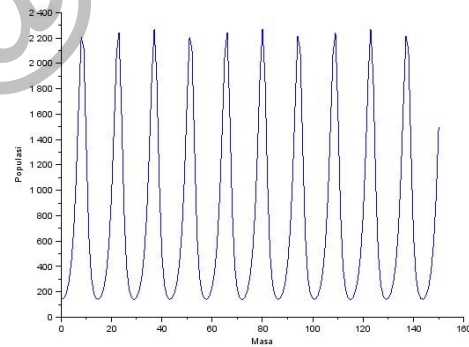
Rajah.9 Graf perbandingan model Lotka-Volterra bagi pemangsa lawan mangsa bagi kes 3

Kes 4 ($h = 1.0$) bagi nilai $A = 0.4$, $B = 0.06$, $c = 0.74$, $d = 0.0006$, $w = 0.37$, $h = 0.001$, $x_0 = 140$ dan $y_0 = 6$

i)



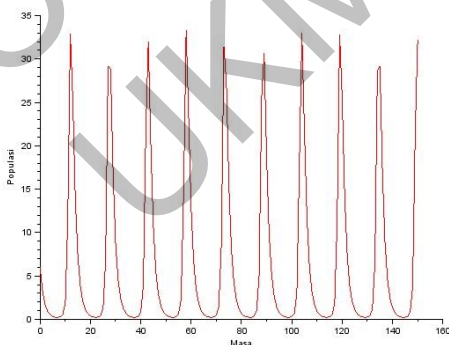
(a) Kaedah BTP



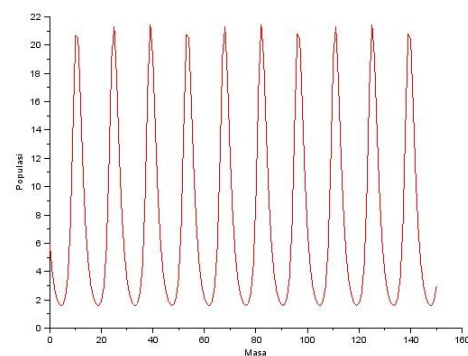
(b) Kaedah BTTP (skema 1)

Rajah 10 Graf perbandingan model Lotka-Volterra bagi mangsa bagi kes 4

ii)



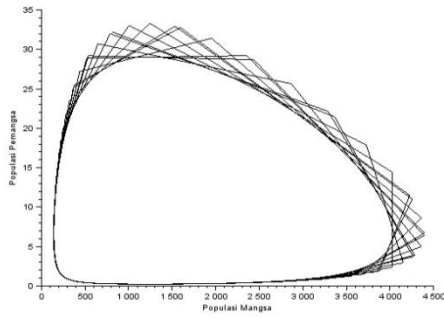
(a) Kaedah BTP



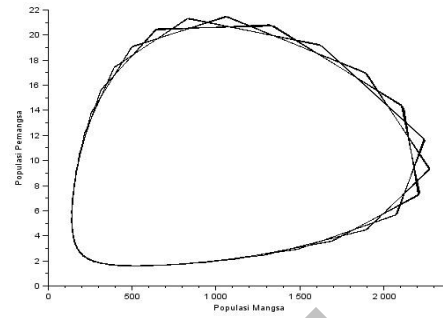
(b) Kaedah BTTP (skema 1)

Rajah 11 Graf perbandingan model Lotka-Volterra bagi Pemangsa bagi kes 4

iii)



(a) Kaedah BTP



(b) Kaedah BTTP (skema 1)

Rajah 12 Graf perbandingan Model Lotka-Volterra bagi Pemangsa Lawan Mangsa bagi kes 4

7. Analisis Hasil Simulasi Model Lotka-Volterra

Di dalam bahagian ini, analisis untuk kesemua simulasi model Lotka-Volterra yang dibuat pada bahagian 5 dibincangkan. Simulasi tersebut adalah perbandingan antara kaedah BTP yang sedia ada di dalam Scilab dengan tiga skema penyelesaian menggunakan kaedah BTTP dengan purata pemberat bagi beberapa set parameter yang berlainan.

Dari hasil simulasi pada Rajah 1 hingga Rajah 9, kesemua graf menunjukkan bacaan yang hampir sama. Pada awal graf-graf tersebut menunjukkan populasi mangsa yang meningkat disebabkan kelahiran mangsa kemudian menurun disebabkan oleh pemangsa yang memakan mangsa pada sesuatu masa yang tertentu. Kemudian, meningkat semula disebabkan kadar kelahiran mangsa dan menurun semula disebabkan oleh pemangsa. Keperluan ini akan berlaku sepanjang masa kerana populasi mangsa merupakan makanan utama bagi populasi pemangsa. Ini menunjukkan bagi $h=0.001$, tak kira nilai parameter kaedah BTP mempunyai tingkahlaku penyelesaian yang sama dengan kaedah BTTP (Skema 1).

Apabila dirujuk Rajah 9 hingga Rajah 12, menunjukkan graf-graf bagi populasi pemangsa melawan mangsa. Kesemua graf tersebut menunjukkan bacaan yang hampir sama tetapi terdapat perbezaan jumlah maksimum dan minimum kadar pertumbuhan bagi Rajah 10(a) yang menggunakan kaedah piawai. Pada permulaan graf tersebut populasi mangsa meningkat disebabkan kelahiran dan pertumbuhan populasi mangsa kemudian menurun disebabkan oleh pemangsa yang memakan mangsa pada sesuatu masa yang tertentu. Keperluan ini berlaku disebabkan sumber makanan bagi pemangsa bergantung sepenuhnya terhadap mangsa. Graf-

graf tersebut menunjukkan tindak balas di antara pemangsa dan mangsa. Di dalam pemerhatian ini, jumlah populasi pemangsa yang sedikit telah menyebabkan penambahan jumlah populasi mangsa manakala jumlah populasi mangsa mula menurun telah meningkatkan jumlah populasi pemangsa. ini disebabkan oleh populasi pemangsa bergantung sepenuhnya kepada populasi mangsa.

Bagi Rajah 11 menunjukkan graf-graf bagi populasi pemangsa. Berdasarkan pada permulaan graf-graf tersebut menunjukkan jumlah populasi pemangsa menurun disebabkan kekurangan makanan pada populasi mangsa, kemudian populasi pemangsa tersebut bertambah disebabkan oleh keadaan populasi mangsa yang semakin banyak dan akan berkurangan semula disebabkan oleh kekurangan sumber makanan terhadap mangsa yang semakin berkurang. Kekerapan ini berlaku disebabkan sumber makanan bagi pemangsa bergantung sepenuhnya terhadap mangsa. Bagi Rajah 12 menunjukkan graf-graf bagi populasi pemangsa melawan mangsa. Graf-graf tersebut menunjukkan tindak balas di antara pemangsa dan mangsa Rajah 12(a) dan Rajah 12(b) sedikit perbezaan.

Kesimpulan

Dua kaedah digunakan untuk menyelesaikan masalah Lotka-Volterra ini iaitu Kaedah BTP dan kaedah integrasi berangka Euler tidak piawai . Kaedah integrasi berangka Euler tidak piawai dengan menggunakan purata pemberat dibahagi kepada tiga skema penyelesaian bagi setiap parameter yang berlainan. Di dalam kajian ini terdapat empat parameter berlainan yang telah diuji yang di sebut kes. Bagi kes 1, 2 dan 3, kajian lebih berpandukan kepada A – kadar pembiakan mangsa dengan C –kadar kematian pemangsa. Di mana lebih tinggi kadar kematian pemangsa, maka jumlah kedua-dua populasi semakin bertambah. Manakala bagi kes 4, lebih tertumpu pada nilai selang masa h yang menggunakan nilai yang lebih besar iaitu 1.0 berbanding dengan nilai selang masa yang kecil dari kes 3 iaitu $h = 0.001$. Dapat diperhatikan di mana semakin kecil nilai selang masa yang digunakan, maka lebih menghampiri ketepatan bagi nilai-nilai yang diperolehi. Ini disebabkan pergerakan di antara dua nilai yang sangat kecil boleh mengurangkan ralat di antara nilai-nilai tersebut.

Penghargaan

Penghargaan buat geran GGP-2017-023 dari UKM.

Rujukan

- Dimitrov, D. T., & Kojouharov, H. V. (2006). Positive and Elementary Stable Nonstandard Numerical Methods with Applications to Predator-Prey Models. *Applied Mathematics Letters*, 98-108.
- Dimitrov, D. T., & Kojouharov, H. V. (2008, June). Nonstandard Finite-Difference Methods for Predator-Prey Models with General Functional Response. *Mathematics and Computer in Simulation*, 78(1), 1-11.
- Dimotrov, D. T., & Kojouharov, H. V. (2005). Nonstandard finite-difference schemes for general two-dimensional autonomous dynamical systems. *Applied Mathematics Letters*, 18, 769-774.
- Mickens, R. E. (2003). Nonstandard Finite Difference Model of Differential Equations. *Applied Mathematics*, 19-30.
- Obaid, T. A. (2013). The Predator-Prey Model Simulation. *Basrah journal of Science, University of Basra*.
- Putri, P. P. (2013). Analisis Solusi Numerik Model Predator-Prey dengan Metode Rungge-Kutta Orde Empat dan Gill. *Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember*.
- Raghib, A. S., & Mowaffaq, H. (2006, October). On Gauss compounding of symmetric weighted arithmetic mean. *Mathematic Analysis and Applications*, 322(2), 729-734.
- Sejong, K., Jimmie, L., & Yongdo, L. (2011, November). The matrix geometric mean of parameterized, weighted arithmetic and harmonic means. *Linear Algebra and its Applications*, 435(9), 2114-2131.
- Yu, H., & Zhao, M. (2009, November). Dynamic behavior of a three-species ecological system with the Beddington-DeAngelis functional response. *Chaos-Fractals Theories and Applications, 2009. IWCFTA '09. International Workshop on*, 346-350.

Yu, H., & Zhao, M. (2011, October). The dynamic complexity of an apparent competition community ecological model with the Beddington-DeAngelis functional response. *Chaos-Fractals Theories and Applications (IWCFTA), 2011 Fourth International Workshop on.*

Yuting, W., & Meng, Y. (2011, August). The Competition of Highway and Railway in the Passenger Transport Corridor Based on Simulink Simulation. *Management and Service Science (MASS), 2011 International Conference on,* 1-4.

Zaihar, Y., & Hasan, M. K. (2015, August). Nonstandard finite difference schemes for natural convection in an inclined porous rectangular cavity. *Electrical Engineering and Informatics 2015, The 5th International Conference on.*

Copyright@FFSM
UKM